乱流における小さな乱れのくり込み (統計流体力学の研究)

AUTHOR(S):

中野, 徹

数理解析研究所講究録
275巻 1976年 66-70

乱流における小さな乱れのくり込み

中央大 理工学部 物理　中野 徹

Reynolds 数Rが十分大きな乱流では慣性領域が発達し、その領域は波数空間ではほぼ $1/L$ から $(1/L)(R/R_c)^{3/4}$ まで拡り、時間空間では τ_L より $\tau_L(R/R_c)^{-1/2}$ まで拡っている（ここでLは容器の代表的長さであり、τ_L はスケールがLの乱れの代表的時間、R_c は臨界Reynolds数である）。 $R \gg R_c$ では慣性領域の波数、代表的時間はオーダーの異った値をとり得る。慣性領域のある波数kの乱れを考えると、その乱れの時間スケール $\tau(k)$ は $\varepsilon^{-1/3}k^{-2/3}$ である（ε は単位時間あたり単位質量あたりのエネルギー散逸の量である）。 波数kの乱れの相互作用の相手の波数qの乱れは $q \gtrless k$ によってその寿命、空間的拡りは全く異なる。 $q>k$ の乱れは波数kの乱れにとっては空間的に局在しており、時間的には早く変動する。ゆらいでいる力と見做せる。 他方 $q<k$ の乱れはゆっくりと変動しているから定常的な力と見做せる。このように考えれば全ての波数のゆらぎを同じように取り扱うことは余り適当でないと考えられる。以下

に波数の違いにより働きが違うことを強調するのによいと筆者が考える方法について述べる。

波数空間の拡がりからくる自由度の数は$(R/R_c)^{9/4}$のオーダーであり、$R \gg R_c$でこの自由度の数のモードを全く同等に取り扱うことはほぼ不可能に見える。このため自由度の数を減らす方法を考える。先に述べたように、波数kの乱れにとって、波数$q(>k)$の乱れは時間的にも空間的にも“局在”しているのでこれらをくり込んでしまう。言い換えれば波数kの乱れの運動を考える時、空間的にはk^{-1}より小さなゆらぎの効果をくり込み、時間的には$\tau(k)$より短い寿命のゆらぎをくり込むことによって空間的時間的な粗視化を行う。幸いなことに$\tau(q) \sim q^{-2/3}$なので空間、時間の粗視化は矛盾なく同時に行える。

まずVertexへの補正を無視して、自己エネルギーへの補正だけを考えれば、Navier-Stokesの方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \omega(k)\right] u_\alpha(\vec{k}, t) = \vartheta_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) \sum_{q,\, |\vec{k}-\vec{q}| \le k} u_\beta(\vec{k}-\vec{q}, t)\, u_\gamma(\vec{q}, t) \tag{1}$$

$$\vartheta_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k}) = -\frac{i}{2}\left(k_\beta \delta_{\alpha\gamma} + k_\gamma \delta_{\alpha\beta} - 2\frac{k_\alpha k_\beta k_\gamma}{k^2}\right)$$

$$\omega(k) = (\nu + \nu_{tur}(k))\, k^2$$

$$\nu_{tur}(k) \sim \sqrt{\int_{mk}^{\infty} dq\, \frac{E(q)}{q^2}}$$

となる。この式の意味は明らかで、$u_\alpha(\vec{k},t)$は乱流粘性を受けながら大きなスケールの乱れと相互作用している。乱流粘性はkより波数の大きな乱れの強さによって決定され、$E(q)$はエネルギースペクトラム、mは2ぐらいをとっていい。この式を導くにあたっては$\vec{u}(\vec{q})$はガウス分布をしていると仮定している。上のreduced Navier-Stokes方程式において$u_\alpha(\vec{k},t)$の源は右辺の大きな乱れの項である。source termとしては上記のもの以外に小さなスケールの乱れからもあるはずであるが、乱流においてはその項は小さい。小さなスケールの乱れが積み重なっていく相転移とは乱流はこの点で異なる。

reduced Navier-Stokes方程式の右辺をsource termとして取り扱う時注意をせねばならぬことがある。すなわち$q\sim 0$と$q\sim k$の項は単に$u_\alpha(\vec{k},t)$がゆっくりと変化する大きなスケールの流れ$\sum_{q<k}\vec{u}(\vec{q},t)$に乗っている効果を表わし、それは$u_\alpha(\vec{k},t)$を作り出すことはない。$u_\alpha(\vec{k},t)$の源は次の展開項$-\vec{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{k}}u_\beta(\vec{k},t)$によって与えられる。勿論高次の項も源たりうるが、最初の項のみを残せば、$\langle|u_\alpha(\vec{k},t)|^2\rangle$に対する方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+2\omega(k)\right]\langle|u_\alpha(\vec{k},t)|^2\rangle=-8\,\nu^{l}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})\,\nu^{l}_{\alpha\delta\varepsilon}(-\vec{k})\int_{-\infty}^{t}ds\,e^{-\omega(k)(t-s)}$$

$$\times\sum_{\vec{q}}{}'\langle q_i q_j u_\gamma(\vec{q},t)\,u^*_\varepsilon(\vec{q},s)\rangle\left\langle\frac{\partial u_\beta(\vec{k},t)}{\partial k_i}\,\frac{\partial u_\delta(-\vec{k},s)}{\partial k_j}\right\rangle \qquad (2)$$

を得る。すなわち大きなスケールの乱れの速度勾配が$\langle |u_\alpha(\vec{k},t)|^2\rangle$を作り出していることを示している。Σ記号のプライムはqはnkより小さいことを意味する(nは½程度)。

$\langle |u_\alpha(\vec{k},t)|^2\rangle$に対する方程式(2)は、kより大きな波数からの寄与は$\int_{mk}^{\infty} dq\, E(q)/q^2$の形で、kより小さな波数からの寄与は$\int_0^{nk} dq\, E(q)\, q^2$で表わされることを示している。したがって$E(q)\sim q^{-\alpha}$と表わせば$3>\alpha>-1$の範囲ではkの近傍の寄与が主であることになる。エネルギースペクトラム$E(k)$は、3次元乱流ではエネルギーが保存されることより、(2)の右辺にk^2を乗じたものがε/kのオーダーでなければならぬことより、$\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$のように表わされる。

空間の粗視化によって(1)の$v_{\alpha\beta\gamma}(k)$は当然小さなスケールの乱れがくり込まれたvertexでなければならぬ。くり込まれたvertex $\tilde{v}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})$は自己エネルギーの計算と同じ手続きによって計算される。最低次の補正は3種のダイアグラムで与えられるが、計算結果は$\tilde{v}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})$のk依存性は$v_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})$のそれと同じであることを示す。高次の補正が$\tilde{v}_{\alpha\beta\gamma}(\vec{k})$のk依存性を変える可能性はないことはないはずであるが、運動量輸送を表わす方程式の形が空間の粗視化によって変化を受けることはむしろないのではないかと考えられる。

最後にintermittency(間欠性)について述べたい。1941年の

Kolmogorov理論によれば、縦方向の速度差 $\Delta u(r) \equiv u(r) - u(0)$ の n 次の相関関数は $\langle(\Delta u(r))^n\rangle \sim \epsilon^{n/3} r^{n/3}$ となるが、実際はLandauとLifshitzの指摘のように ϵ はゆらいでいる。Van AttaとParkによれば測定された $\Delta u(r)$ の分布関数は r が減少するに従って、Gauss分布から離れてきて、計算された n 次のモーメントは r の広い範囲にわたって $\langle(\Delta u(r))^n\rangle \sim r^{n/3}(L/r)^{\zeta_n}$ を満足する。n が小さな時は ζ_n は 0 に近いが、n が大きくなるにつれて増加する。言い換えれば、低次のモーメントは1941年のKolmogorov理論でよく近似されるが、高次のモーメントに関してはそれは正しく記述しているとは言えない。

3次元のNavier-Stokes方程式において $\nu=0$ でエネルギーが保存されることはきわめて重要である。エネルギーとかエネルギーフラックスのような u の低次のモーメントはエネルギーの保存の要請に大きく支配されるが、他方高次のモーメントはそうではない。したがって低次のモーメントと高次のモーメントは全く異質のものであるかもしれぬ。実用的には低次のモーメントが大切であることには議論の余地がないが、高次のモーメントも乱流それ自体の重要な部分である。乱流の間欠性が(1)からどのように得られるかは未だ明らかではないが、(1)の右辺のsource termのゆらぎと結びついていることは正しいであろう。